第14講　対数とその性質

PART1　対数

要点①　対数の定義

指数関数 $y=2^x$ は増加関数であり，値域は $y>0$ である。

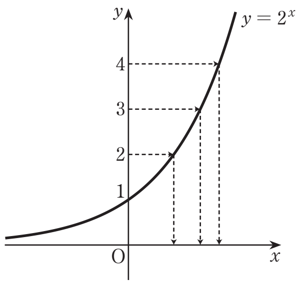
よって，どのような正の数 M に対しても

$M=2^x$　　つまり　$2^x=M$

を満たす実数 x がただ 1 つ定まる。例えば

$2^x=2$　より　$x=$　　　　　$2^x=4$　より　$x=$

である。



$2^x=3$ を満たす x は確かに存在するが，その x は無理数，すなわち循環しない無限小数である。このような x を表すために，新しい記号を定義する。

一般に，$a>0$，$a \neq 1$ とするとき，どのような正の数 M に対しても

$a^p=M$

を満たす実数 p がただ 1 つ定まる。この p の値を「　　　」と表し，a を「　」とする M の「　　」という。上記の $2^x=3$ を満たす x の値は　　　と表す。

また，$\log_a M$ における M を，この対数の「　　」という。対数の真数は，正の数である。

指数と対数

$a>0$，$a \neq 1$，$M>0$ のとき

$$a^p=M \iff p=\log_a M$$

例　$2^4=16$　より

$\log_2 \dfrac{1}{8}=-3$　より

対数 $\log_3 9$ の値を求める。

$\log_3 9=p$　とおくと　$3^p=9$　より　$3^p=3^2$　　よって　$p=2$

したがって　$\log_3 9=2$

$M = a^p$　のとき　$\log_a M = p$　であるから，次の等式が成り立つ。

$\log_a a^p = p$

この等式を用いると　$\log_3 9 = \log_3 \quad = \quad$　である。

1 (1) 次の関係を $p=\log_a M$ の形にかけ。

(i) $2^6=64$　(ii) $3^{-2}=\dfrac{1}{9}$　(iii) $9^{\frac{1}{2}}=3$

(2) 次の関係を $a^p=M$ の形にかけ。

(i) $\log_5 125=3$　(ii) $\log_7 \dfrac{1}{7}=-1$　(iii) $\log_8 2=\dfrac{1}{3}$

(3) 次の対数の値を求めよ。

(i) $\log_{10} 1000$　(ii) $\log_3 \sqrt{3}$　(iii) $\log_4 \dfrac{1}{16}$

Point Pickup

指数と対数

$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$ のとき

$$a^p=M \iff p=\log_a M$$

対数 $\log_a M$ の値は，「底 a を『何乗』すると真数 M になるか」という問いの答えである。

よって　$\log_a a^p=p$　である。

第 14 講 PART1 確認問題

答えに当てはまるものを，それぞれ①～④のうちから選べ。

1 $3^2=9$ を $p=\log_a M$ の形にかくと

$p=$ ア ，$a=$ イ ，$M=$ ウ

① $\dfrac{1}{2}$ ② 2 ③ 3 ④ 9

2 $2^{-4}=\dfrac{1}{16}$ を $p=\log_a M$ の形にかくと

$p=$ エ ，$a=$ オ ，$M=$ カ

① $\dfrac{1}{16}$ ② 2 ③ 4 ④ -4

3 $49^{\frac{1}{2}}=7$ を $p=\log_a M$ の形にかくと

$p=$ キ ，$a=$ ク ，$M=$ ケ

① $\dfrac{1}{2}$ ② 2 ③ 7 ④ 49

4 $\log_2 32=5$ を $a^p=M$ の形にかくと

$a=$ コ ，$p=$ サ ，$M=$ シ

① $\dfrac{1}{2}$ ② 2 ③ 5 ④ 32

5　$\log_{10}\dfrac{1}{100}=-2$ を $a^p=M$ の形にかくと

$a=$ ス，$p=$ セ，$M=$ ソ

①　-2　②　2　③　10　④　$\dfrac{1}{100}$

6　$\log_{81}3=\dfrac{1}{4}$ を $a^p=M$ の形にかくと

$a=$ タ，$p=$ チ，$M=$ ツ

①　$\dfrac{1}{3}$　②　$\dfrac{1}{4}$　③　3　④　81

次の対数の値を求めよ。

7　$\log_2 16=$ テ

8　$\log_5\sqrt{5}=\dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$

9　$\log_3\dfrac{1}{27}=$ ニヌ

【MEMO】

第 14 講　対数とその性質

PART1　対数

1　(1)　次の関係を $p=\log_a M$ の形にかけ。

(i)　$2^6=64$　　(ii)　$3^{-2}=\dfrac{1}{9}$　　(iii)　$9^{\frac{1}{2}}=3$

(2)　次の関係を $a^p=M$ の形にかけ。

(i)　$\log_5 125=3$　　(ii)　$\log_7 \dfrac{1}{7}=-1$　　(iii)　$\log_8 2=\dfrac{1}{3}$

(3)　次の対数の値を求めよ。

(i)　$\log_{10} 1000$　　(ii)　$\log_3 \sqrt{3}$　　(iii)　$\log_4 \dfrac{1}{16}$

[解答]

(1) (i)　$6=\log_2 64$　　(ii)　$-2=\log_3 \dfrac{1}{9}$　　(iii)　$\dfrac{1}{2}=\log_9 3$

(2) (i)　$5^3=125$　　(ii)　$7^{-1}=\dfrac{1}{7}$　　(iii)　$8^{\frac{1}{3}}=2$

(3) (i)　$\log_{10} 1000=\log_{10} 10^3=3$

(ii)　$\log_3 \sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

(iii)　$\log_4 \dfrac{1}{16}=\log_4 \dfrac{1}{4^2}=\log_4 4^{-2}=-2$

第14講 PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：②，イ：③，ウ：④

[解説]

$3^2=9$ より　$2=\log_3 9$ [A]

> [A]　$a^p=M \iff p=\log_a M$
> $(a>0,\ a\neq 1,\ M>0)$

2 **[正解]** エ：④，オ：②，カ：①

[解説]

$2^{-4}=\dfrac{1}{16}$ より　$-4=\log_2\dfrac{1}{16}$ [B]

> [B]　$a^p=M \iff p=\log_a M$
> $(a>0,\ a\neq 1,\ M>0)$

3 **[正解]** キ：①，ク：④，ケ：③

[解説]

$49^{\frac{1}{2}}=7$ より　$\dfrac{1}{2}=\log_{49}7$ [C]

> [C]　$a^p=M \iff p=\log_a M$
> $(a>0,\ a\neq 1,\ M>0)$

4 **[正解]** コ：②，サ：③，シ：④

[解説]

$\log_2 32=5$ より　$2^5=32$ [D]

> [D]　$p=\log_a M \iff a^p=M$
> $(a>0,\ a\neq 1,\ M>0)$

5 **[正解]** ス：③，セ：①，ソ：④

[解説]

$\log_{10}\dfrac{1}{100}=-2$ より　$10^{-2}=\dfrac{1}{100}$ [E]

> [E]　$p=\log_a M \iff a^p=M$
> $(a>0,\ a\neq 1,\ M>0)$

6 [正解] タ：④，チ：②，ツ：③

[解説]

$\log_{81} 3 = \dfrac{1}{4}$ より　$81^{\frac{1}{4}} = 3$ [F]

[F]　$p = \log_a M \iff a^p = M$
$(a > 0,\ a \neq 1,\ M > 0)$

7 [正解] テ：4

[解説]

$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ [G]

[G]　$\log_a a^p = p\ (a > 0,\ a \neq 1)$

8 [正解] ト：1，ナ：2

[解説]

$\log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$ [H]

[H]　$\log_a a^p = p\ (a > 0,\ a \neq 1)$

9 [正解] ニヌ：－3

[解説]

$\log_3 \dfrac{1}{27} = \log_3 \dfrac{1}{3^3}$

$= \log_3 3^{-3} = -3$ [I]

[I]　$\log_a a^p = p\ (a > 0,\ a \neq 1)$